# Resistencia de materiales

April 3, 2009

En ingeniería se denomina *viga* a un elemento constructivo lineal que trabaja principalmente a flexión. La *teoría de vigas* es una parte de la *resistencia de materiales* que permite el cálculo de esfuerzos y deformaciones en vigas. Si bien las vigas reales son sólidos deformables, en teoría de vigas se pueden realizar ciertas simplificaciones: en las vigas, la longitud predomina sobre las otras dos dimensiones con lo que se pueden considerar como un elemento unidimensional (que suele ser horizontal). Gracias a estas simplificaciones se pueden calcular con facilidad tensiones, desplazamientos y esfuerzos.

Para empezar, consideramos una viga de longitud $L$ homogénea con sección transversal uniforme. Cuando no está sometida a ninguna fuerza externa (como su propio peso u otras cargas), la curva que une los centroides de sus secciones transversales es una recta que denominamos *eje de simetría*. Si a la viga se le aplica una carga en un plano vertical, que contiene al eje de simetría, este eje sufre una distorsión (deformación) y la curva resultante se denomina *curva elástica*. La curva elástica describe la forma de la viga cuando se deforma. Supongamos que el eje $x$ coincide con el eje de simetría y que $u(x)$ es el desplazamiento (flexión o flecha) de un punto P del eje de simetría cuando está sometido a esta carga vertical. El problema que queremos resolver consiste en encontrar la ecuación de la curva elástica a partir de una EDO que depende del campo de desplazamientos.

La teoría de elasticidad relaciona la carga por unidad de longitud, $P(x)$, con el momento flector, $M(x)$, en un punto $x$ a lo largo de la viga:

$$\frac{d^2M}{dx^2} = P(x). \tag{1}$$

Por otro lado, el momento flector es proporcional a la curvatura, $\kappa$ de la curva elástica:

$$M(x) = EI\kappa, \tag{2}$$

donde $E$ e $I$ son dos constantes correspondientes al módulo de Young de elasticidad del material y al momento de inercia de la sección transversal de la viga, respectivamente. El producto $EI$ se denomina *rigidez*. Según las aplicaciones de la derivada, la curvatura es:

$$\kappa = \frac{u''}{[1+(u')^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Cuando el desplazamiento es pequeño, la pendiente $u' = 0$, de modo que $\left[1 + (u')^2\right]^{\frac{3}{2}} \approx 1$, y, por tanto, $\kappa = u''$. Así, la ecuación (2) se transforma en:

$$M = IEu''.$$

La segunda derivada del momento flector es:

$$\frac{d^2M}{dx^2} = EI\frac{d^2u''}{dx^2} = EI\frac{d^4y}{dx^4},$$

por lo que teniendo en cuenta la expresión (1), el desplazamiento verifica la siguiente EDO de cuarto orden:

$$\frac{d^4u}{dx^4} = \frac{P(x)}{EI},$$

que permite encontrar la ecuación de la curva elástica.

Las condiciones de contorno asociadas a este tipo de problemas, dependen de la forma en que están sostenidos los extremos de la viga. Una viga en voladizo está empotrada en un extremo y libre en el otro (ejemplos: trampolín, el brazo extendido, el ala de un avión, una marquesina, etc). Para una viga en voladizo cuyo extremo empotrado coincide con $x = 0$, el desplazamiento debe satisfacer las siguientes condiciones:

$$u(0) = 0,$$

porque no hay desplazamiento en ese lugar, y

$$u'(0) = 0,$$

porque curva elástica es tangente al eje $x$. Las condiciones del extremo libre, $x = L$, son:

$$u''(L) = 0,$$

porque el momento flector en $x = 0$ es nulo, y

$$u'''(L) = 0,$$

porque la fuerza cortante debe ser cero.

## Ejemplo: viga empotrada

Una viga de longitud $L$ m está empotrada en ambos extremos. Determina la flexión de la viga si sostiene una carga constante de $P_0$ T/m uniformemente distribuida en su longitud, esto es, $P(x) = P_0$, $0 < x < L$.Solución

Como acabamos de plantear, el desplazamiento (flexión) $u(x)$ verifica la ecuación:

$$\frac{d^4u}{dx^4} = \frac{P_0}{EI}.$$

Puesto que la viga está empotrada en su extremo izquierdo ($x = 0$) y en su extremo derecho ($x = L$), no hay deformación y la curva elástica es horizontal es esos puntos. Así, las condiciones de contorno son:

$$\left\{\begin{array}{c} u(0) = 0 \\ u'(0) = 0 \\ u(L) = 0 \\ u'(L) = 0 \end{array}\right.$$

La ecuación diferencial la podemos resolver de la forma acostumbrada, obteniendo que:

$$u(x) = -\frac{P_0 x^4}{24EI} + \frac{C_1}{6}x^3 + \frac{C_2}{2}x^2 + C_3 x + C_4.$$

Considerando las condiciones de contorno:

$$\left\{\begin{array}{c} C_1 = -\frac{P_0 L}{2EI} \\ C_2 = \frac{P_0 L^2}{12EI} \\ C_3 = 0 \\ C_4 = 0 \end{array}\right. ,$$

es decir,

$$u(x) = \frac{P_0}{24EI}x^4 - \frac{P_0 L}{12EI}x^3 + \frac{P_0 L^2}{24EI}x^2 = \frac{P_0}{24EI}x^2\left(x - L\right)^2.$$

**Ejemplo**

$L = 6$; $P_0 = -2$; $EI = 1$.

Figura 1: Desplazamiento (proporcional al real):

$$u(x) = \frac{-1}{12}x^4 + x^3 - 3x^2$$

Figura 2: Giros (proporcionales a los reales):

$$u'(x) = -\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 6x$$

Figura 3: Momento flector (solicitaciones flectoras):

$$u''(x) = M(x) = -x^2 + 6x - 6$$

Figura 4: Solicitaciones cortantes:

$$u'''(x) = V(x) = -2x + 6$$

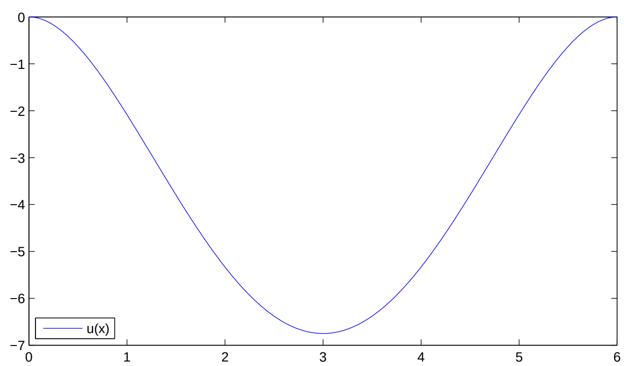


Figure 1: Desplazamiento

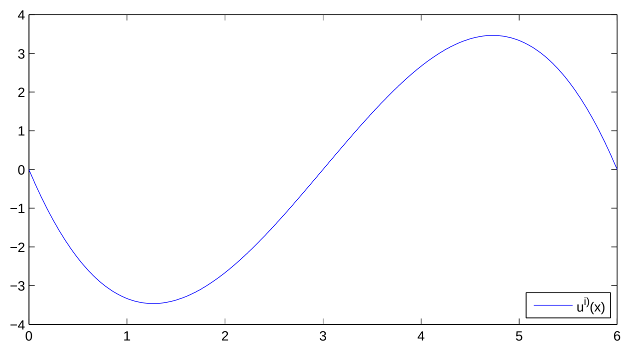


Figure 2: Giros

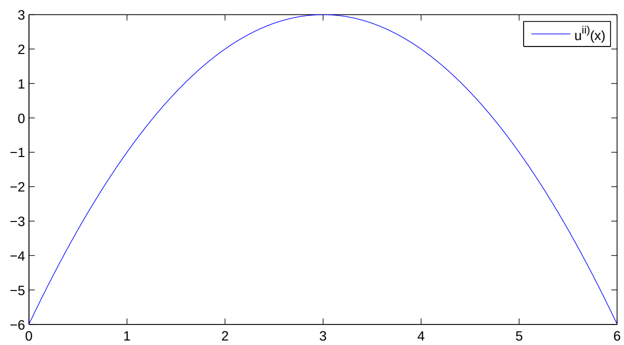


Figure 3: Solicitaciones flectoras

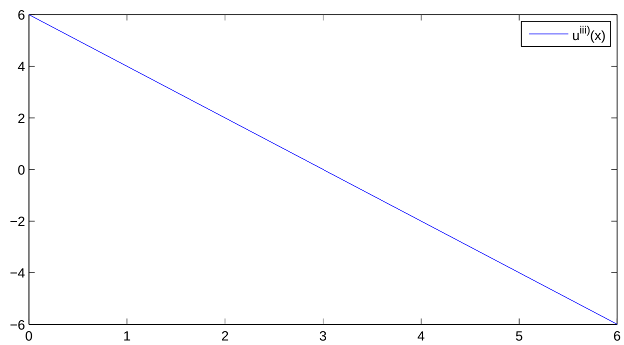


Figure 4: Solicitaciones cortantes